*Графом* называется пара *G* = (*V*, *E*), где *V* – некоторое непустое конечное множество, *E* – множество неупорядоченных пар различных элементов из *V*. Элементы множества *V* называются *вершинами* графа, элементы множества *E* – его *рёбрами*. Множество вершин графа *G* будем обозначать через *V*(*G*), число вершин (*порядок* графа *G*) – *n*, число ребер – *m*. Говорят, что две вершины *u* и *v* графа *смежны*, если множество {*u*, *v*} является ребром и *не смежны* в противном случае. Если *u* и *v* – две различные вершины в графе *G*, то под (*u*, *v*)-цепью понимается любая простая цепь с концами в вершинах *u* и *v*. Если в графе *G* между любыми двумя вершинами *u* и *v* имеется (*u*, *v*)-цепь, то граф *G* называется *связным*. *Расстоянием* между вершинами *u* и *v* в *G* называется длина кратчайшей (*u*, *v*)-цепи (при этом расстояние полагается равным ∞, если вершины *u*, *v* принадлежат различным компонентам связности в *G*). *Диаметром* графа называется максимум среди всех расстояний между парами вершин в этом графе. Граф диаметра 2 назовём *критическим*, если удаление любого ребра в этом графе приводит к увеличению диаметра. *Обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла в этом графе (при этом обхват полагается равным ∞, если граф не содержит циклов).

Обозначим через δ(*G*) – минимальную степень вершины в графе *G*. Подмножество *S* ⊆ *V*(*G*) называется *независимым*, если никакие две вершины из *S* не смежны. *Число независимости* графа – наибольшее число вершин в независимом множестве этого графа. Подмножество *S* ⊆ *V*(*G*) называется *доминирующим*, если каждая вершина из *V*(*G*) \ *S* смежна с некоторой вершиной из *S*. Подмножество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является как независимым, так и доминирующим. *Число доминирования* графа – наименьшая мощность доминирующего множества этого графа. Число вершин в наименьшем по мощности независимом доминирующем множестве графа *G* называется *числом независимого доминирования* этого графа и обозначается через *i*(*G*).

Тройка {*u*, *v*, *w*} вершин графа называется *треугольником*, если неупорядоченные пары {*u*, *v*}, {*u*, *w*}, {*v*, *w*} являются ребрами этого графа. Будем говорить, что граф *G* обладает *треугольным свойством*, если он не содержит треугольников и является максимальным в этом смысле, т. е. добавление ребра между любыми двумя его несмежными вершинами приводит к образованию треугольника.

0) Найдите числа независимости, доминирования и независимого доминирования, а также диаметр и обхват для а) полного графа; б) полного двудольного графа с долями размера *m* и *n*; в) цикла на *n* вершинах.

1) Приведите примеры (желательно бесконечные серии) графов *G*, обладающих треугольным свойством. Докажите, что графы, обладающие треугольным свойством, связны и при *n* ≥ 3 имеют диаметр, равный 2.

2) Докажите, что любой полный двудольный граф обладает треугольным свойством. Верно ли, что любой полный двудольный граф является критическим?

3) Докажите, что каждый граф, удовлетворяющий треугольному свойству, является критическим. Верно ли обратное утверждение?

4) Докажите, что для графа *G* порядка *n* ≥ 2, удовлетворяющего треугольному свойству, имеют место следующие неравенства

.

Под записью [*х*] здесь и далее понимается целая часть числа *х*.

5) Опишите все графы *G*, порядка *n* ≥ 2, обладающие треугольным свойством, для которых .

6) Верно ли, что для каждого графа *G*, обладающего треугольным свойством, выполнено соотношение ? В случае отрицательного ответа на этот вопрос постарайтесь найти бесконечные серии графов *G*, обладающих треугольным свойством, для которых .

7) Докажите, что обхват графа, обладающего треугольным свойством, может принимать только два значения 4 или 5. Существует ли граф *G* обхвата 5, обладающий треугольным свойством, для которого ? Какие значения может принимать обхват произвольного критического графа?

8) Докажите, что при *n* ≥ 5 существует граф порядка *n* c *m* рёбрами, обладающий треугольным свойством, тогда и только тогда, когда

 или ,

где *k* – некоторое положительное целое число. Например, отсюда вытекает, что при *n* = 15 возможными значениями для числа *m* рёбер графа *G*, могут быть только следующие: 14, 25, 26, …, 49, 50, 54, 56.

9) Существует ли критический граф *G*, не обладающий треугольным свойством, для которого ? Существуют ли критические графы, не обладающие треугольным свойством, для которых ?

10) Приведите свои обобщения треугольного свойства и исследуйте их. Например, можно предложить следующий вариант обобщения. Пусть *p* – целое число, *p* ≥ 3. Будем говорить, что граф *G* обладает *p-свойством*, если он не содержит полных подграфов порядка *p* и является максимальным в этом смысле, т. е. добавление ребра между любыми двумя его несмежными вершинами приводит к образованию полного подграфа на *p* вершинах. В частности, при *p* = 3 получаем треугольное свойство.